

# GPU 가속화 기반의 인터랙티브 이송-확산 모형 개발



**황순철**  
고려대학교  
건축사회환경공학과  
박사과정  
leneords@hanmail.net



**손상영**  
고려대학교  
건축사회환경공학과  
부교수  
sson@korea.ac.kr

## 01 들어가며

연안공학에서 스칼라 이송 메커니즘에 대한 이해는 유류유출, 오염물질 유출 및 녹조 등 다양한 분야의 해석을 위해 중요하다. 인간 활동에 의한 해양으로의 오염물질 배출량 증가와 더불어 오염물질 유출 사고의 빈도 증가는 해양 생태계를 위협하고 있으며, 지구온난화에 따른 해양 기상조건의 악화는 이를 더욱 예측 불가능하게 만들고 있다. 오염물질의 수송은 주로 해류에 의해 지배되기 때문에, 동수역학 및 근해역학은 흐름과 더불어 오염물질 수송의 예측에도 기여한다. 염료를 이용한 용질 수송의 현장관측은 비용적인 문제와 더불어 상대적으로 연구범위가 제한적이기 때문에 해양에서의 흐름과 용질 이송을 분석하는 데 사용되는 일반적인 접근법 중 하나는 수치모델링이다.

비선형 천수방정식은 높은 계산 효율성과 안정성으로 조석, 폭풍해일 및 쓰나미 등 다양한 장주기파를 해석하는 데 활용되며 이송-확산 모형 내 해수유동 해석에 있어서도 일반적으로 널리 사용되고 있다. 그러나, 천수방정식은 모형의 실용성에도 불구하고 분산성을 고려할 수 없어 연안의 불규칙한 파랑 특성을 반영하는 데 한계가 있다. 이와 다르게 Boussinesq 방정식은 파랑의 분산성을 고려할 수 있어 높은 정확성과 넓은 적용범위로

해안에서의 정확성 높은 흐름 해석에 주로 사용된다. 그러나, 분산성 고려에 따른 고차항의 계산은 연산량을 기하급수적으로 증가시키며, 모델 안정성을 저하시킨다. 또한, 모델 안정성을 보장하기 위한 음해법의 사용은 계산 효율성을 더욱 악화시킨다. 따라서, Boussinesq 방정식을 풀이하는 수치모형의 사용은 천문학적 비용의 하드웨어 구축과 병렬연산, GPU 연산 등 고성능 컴퓨팅시스템을 요구한다. Tavakkol and Lynett (2017)는 GPU 가속화를 활용하여 Boussinesq 방정식을 풀이하는 오픈소스 파랑해석 소프트웨어인 Celeris Advent를 개발하였다. GPU 가속화를 통해 빠른 계산속도를 지닌 Celeris Advent는 유한체적법의 안정성과 Boussinesq 모형의 높은 정확성을 동시에 보장하는 하이브리드 유한체적-유한차분법을 사용하여 지배방정식을 풀이한다. 이와 더불어 Celeris Advent는 그림 1과 같이 GUI (Graphical User Interface)를 통해 사용자-모델간 소통할 수 있는 인터랙티브 시스템이 구축되어 있어 시뮬레이션 도중에도 마우스 클릭을 통해 수위, 지형 및 모델 매개변수를 바꿀 수 있다는 장점을 가지고 있어, 계산 효율성뿐 아니라 사용성 및 편의성을 증가시킨 모형이다.

실시간보다 빠른 GPU 가속화 기반의 인터랙티브 이송-확산 모형 개발을

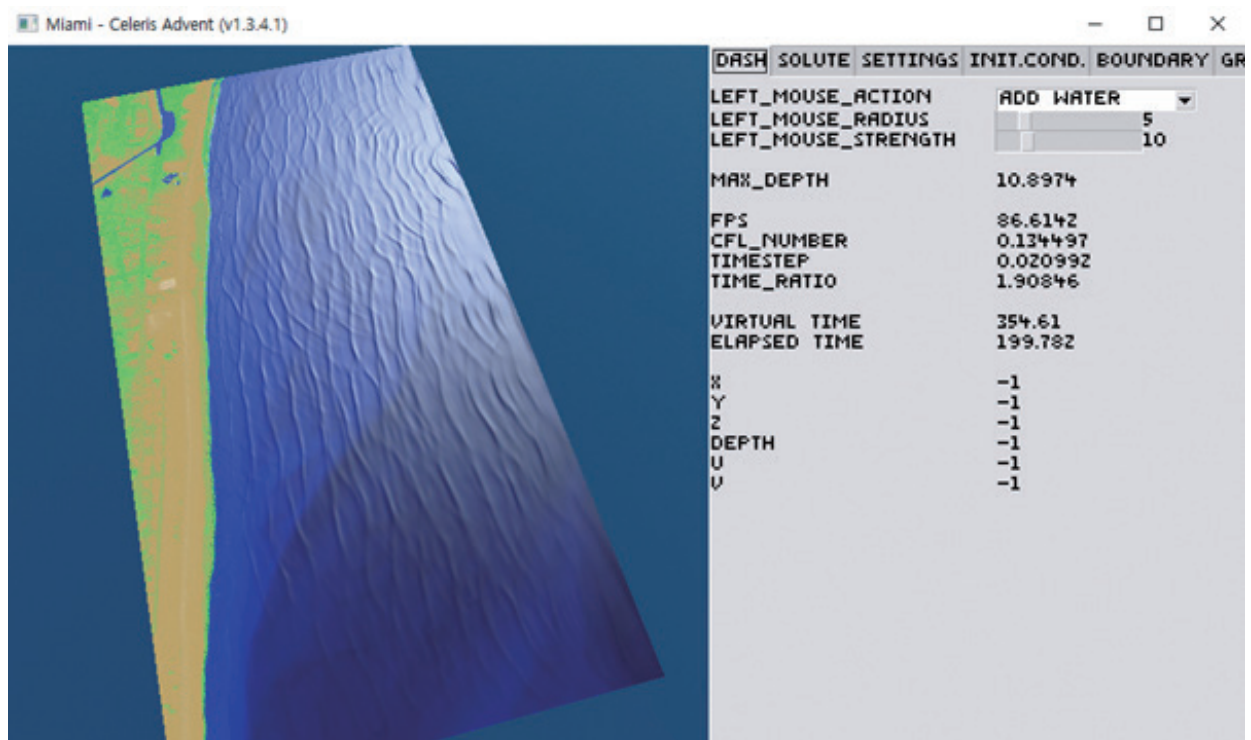


그림 1. GUI를 통한 인터랙티브 시스템

위해 동수역학 모형으로 Celeris Advent을 사용하였으며, 이송-확산 방정식과 Boussinesq 방정식을 결합하였다. Celeris Advent는 수평좌표계로 구성된 2차원 공간에서의 파랑의 전파를 해석하기 때문에 차원의 일치를 위해 수심적분형 이송-확산 방정식을 사용하였으며 수치기법의 일관성을 유지하기 위해 Celeris Advent에서 사용된 하이브리드 차분화를 사용하여 이송-확산 방정식을 풀이하였다. 이송항에 사용된 수치기법의 경우 질량 및 운동량 방정식에만 적합하며, 이송-확산 방정식에 적용할 경우 과도한 수치확산이 발생하는 문제가 있기 때문에, 이를 방지하기 위해 결합모형에서는 Liu (2019)에서 제안한 수정된 수치기법을 사용하였다. 본 기고에서는 상기에 기술한 실시간보다 빠른 GPU 가속화 기반의 인터랙티브 이송-확산 모형에 대해 소개하고자 한다.

## 02 모형 소개

본 기고에서 소개하는 이송-확산 결합모형은 Madsen and Sørensen (1992)에 의해 유도된 Boussinesq 방정식(식 1-3)과 수심적분된 이송-확산 방정식(식 4)을 지배방정식으로 사용하며, 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} + \frac{\partial hv}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( hu^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + \frac{\partial huv}{\partial y} + ghz_x + \psi_1 + f_1 + hR_{bx} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial hv}{\partial t} + \frac{\partial huv}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( hv^2 + \frac{gh^2}{2} \right) + ghz_y + \psi_2 + f_2 + hR_{by} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial hc}{\partial t} + \frac{\partial huc}{\partial x} + \frac{\partial hvc}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( Kh \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( Kh \frac{\partial c}{\partial y} \right) + C\delta(x - x_s)\delta(y - y_s) = 0 \quad (4)$$

여기서,  $h$ 는 전수심,  $t$ 는 시간,  $u, v$ 는 수평방향의 수심적분된 유속,  $c$ 는 수심적분된 스칼라 농도,  $g$ 는 중력가속도,  $z_x, z_y$ 는 각 방향에 따른 하상경사,  $f_1, f_2$ 는 바닥 마찰항,  $R_{bx}, R_{by}$ 는 와점성계수에 따른 난류 소산항을 나타내며, 식 5-6에 의해 계산된다.

$$R_{bx} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial}{\partial x} (hu) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial}{\partial y} (hu) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial}{\partial x} (hv) \right) \right) \quad (5)$$

$$R_{by} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \nu \frac{\partial}{\partial y} (hv) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial}{\partial y} (hu) \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \nu \frac{\partial}{\partial x} (hv) \right) \right) \quad (6)$$

여기서, 와점성계수  $\nu$ 는 Kennedy et al. (2000)에서 제안한 단순한 형태의 쇄파공식을 사용하였으며 식 7과 같다.

$$\nu = B \delta_b^2 h \frac{\partial h}{\partial t} \quad (7)$$

여기서,  $\delta_b$ 는 무차원의 혼합 길이 계수를 나타내며 B는 0~1 사이의 값을 갖는 쇄파 발생 동안의 연속적인 운동에너지 감소를 나타내기 위한 선형 비례계수를 나타내며, 식 (8)과 같이 계산된다.

$$B = \begin{cases} 1, & \frac{d\eta}{dt} > 2 \frac{d\eta^*}{dt} \\ \frac{d\eta/dt}{d\eta^*/dt} - 1, & \frac{d\eta^*}{dt} < \frac{d\eta}{dt} \leq 2 \frac{d\eta^*}{dt} \\ 0, & \frac{d\eta}{dt} < \frac{d\eta^*}{dt} \end{cases} \quad (8)$$

여기서,  $\eta^*$ 는 쇄파의 발생과 종결을 나타내는 매개변수이다.  $\eta^*$ 의 시간에 따른 변화는 선형 가정에 의해 추정되며, 쇄파 발생 이후 쇄파 발생에 대한 임계치의 시간에 따른 감소는 식 (9)와 같이 나타난다.

$$\frac{d\eta^*}{dt} = \begin{cases} \frac{d\eta^{(F)}}{dt}, & t \geq T^* \\ \frac{d\eta^{(I)}}{dt} + \frac{t - t_0}{T^*} \left( \frac{d\eta^{(F)}}{dt} - \frac{d\eta^{(I)}}{dt} \right), & 0 \leq t - t_0 < T^* \end{cases} \quad (9)$$

여기서,  $T^*$ 는 쇄파 지속시간을 나타내며,  $t_0$ 는 쇄파 발생시간을 나타낸다.  $\frac{d\eta^{(I)}}{dt}$ 는 쇄파 발생의 개시에 대한 임계치를 나타내며,  $\frac{d\eta^{(F)}}{dt}$ 는 쇄파가 발생한 뒤 쇄파 지속시간( $T^*$ )만큼 지나고 난 이후의 쇄파 발생에 대한 임계치를 나타낸다.

## 03 모형 검증

### 3.1차원 등류에서의 스칼라 이송

먼저, 결합모형의 검증을 위해 1차원 공간 내 등류 흐름에서의 스칼라 이송을 모의하였다. 16 m 길이의 마찰이 없는 가상 수로를 설정하였으며, 수로 내 수심은 1 m로 일정하게 설정하였다. 등류 조건은 유속 1.0 m/s로 정하였으며,

초기 스칼라 농도 분포는 식 (10)과 같다. 수치확산 발생 여부를 확인하기 위해 스칼라의 확산은 고려하지 않았으며 0.01 m 격자 크기를 이용하여 16 m 가상수로를 1,601개의 격자로 구성하였다.

$$c(x, 0) = \begin{cases} e^{-4.5(x-3)^2}, & \text{if } 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (10)$$

그림 2는 해석해와 결합모형을 이용한 수치해 사이의 스칼라 이송 비교결과를 나타낸다. 이론적으로 일정한 유속장 내의 스칼라는 그림 2의 검은색 별표와 같이 분포의 변형 없이 통과하는 시간에 유속을 곱한 만큼 이동하여야 하며 이에 따라 10초일 때 10 m를 이동하여 13 m에서 최대값을 나타냄을 확인할 수 있다. 그림 2의 적색 실선으로 표시된 결합모형을 이용한 결과는 수치 확산 없이 해석해와 정확하게 일치함을 확인할 수 있다.

### 3.2 2차원 회전류에서의 스칼라 이송

다음으로, 모델 검증은 2차원 흐름 문제로 확장하여 2차원 회전류에서의 스칼라 이송을 모의하였다. 한 변의 길이가 80 m인 마찰이 없는 정사각형 수조를 가정하였으며 1차원 흐름 문제와 마찬가지로 수심은 1 m로 가정하였다.

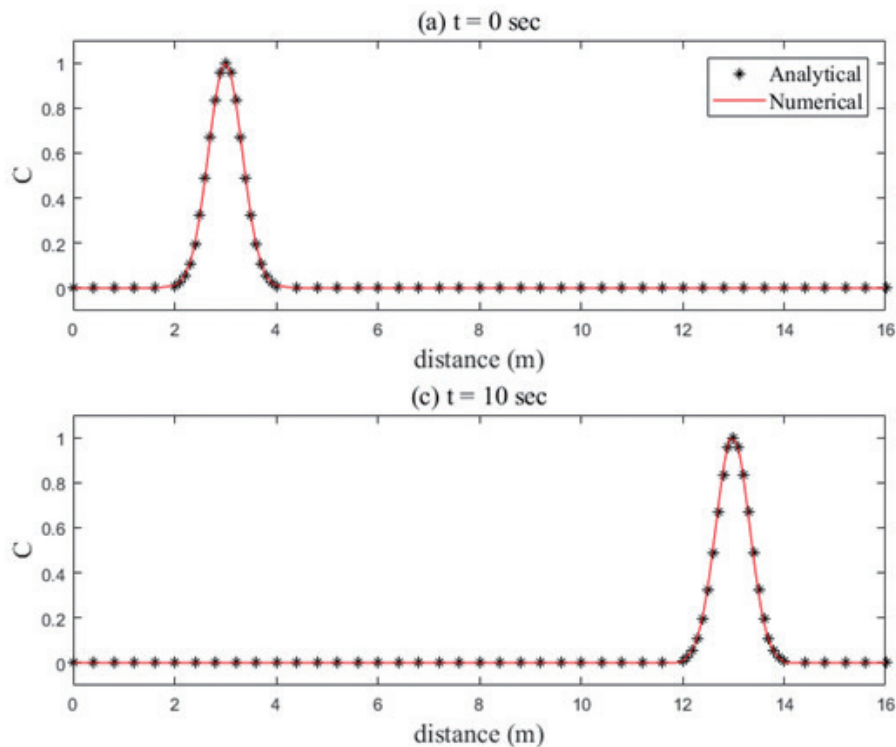


그림 2. 1차원 등류에서의 스칼라 이송 결과 비교

또한, 수조 내 흐름 조건은 식 (11)와 같다.

$$u(x, y, t) = -\frac{2\pi}{360}(y - 40), \quad v(x, y, t) = \frac{2\pi}{360}(x - 40) \quad (11)$$

이는  $(x, y) = (40, 40)$  을 중심으로 하여 시계방향으로 회전하는 흐름을 나타내며 회전주기는 360초이다. 또한, 초기 스칼라 분포는 식 (12)과 같다.

$$c(x, y, 0) = \begin{cases} 1, & \text{if } (x - 20)^2 + (y - 40)^2 \leq 7^2, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (12)$$

그림 3은 360초에서의 (a)  $y=40$  m, (b)  $x=20$  m 단면에 따른 스칼라 이송 결과 비교를 나타낸다. 해석해의 경우 중심점을 기준으로 한 바퀴 회전하는 동안 어떠한 변형없이 초기 스칼라 분포를 그대로 유지하고 있는 것으로 확인할 수 있다. 결합모형에 의해 모의된 결과는 농도의 불연속이 발생하는 지점에서 일부 수치확산이 발생함을 확인할 수 있다. 그러나 스칼라의 최대값은 유지되고 있으며 수치확산이 극히 일부분에서만 발생하고 있기 때문에 해석해와의 비교 결과 결합모형은 무시 가능한 수준의 수치확산을 가지고 있으나 매우 정확함을 확인할 수 있다.

### 3.3 수중 원형 섬 뒤에서 발생하는 후류에서의 용질 이송

앞의 두 가지의 이상적인 조건에서의 해석해와의 비교는 모델 검증을 위해 수행되었으며 이를 통해 결합모형의 정확성은 확인되었다. 이와 더불어 모형의

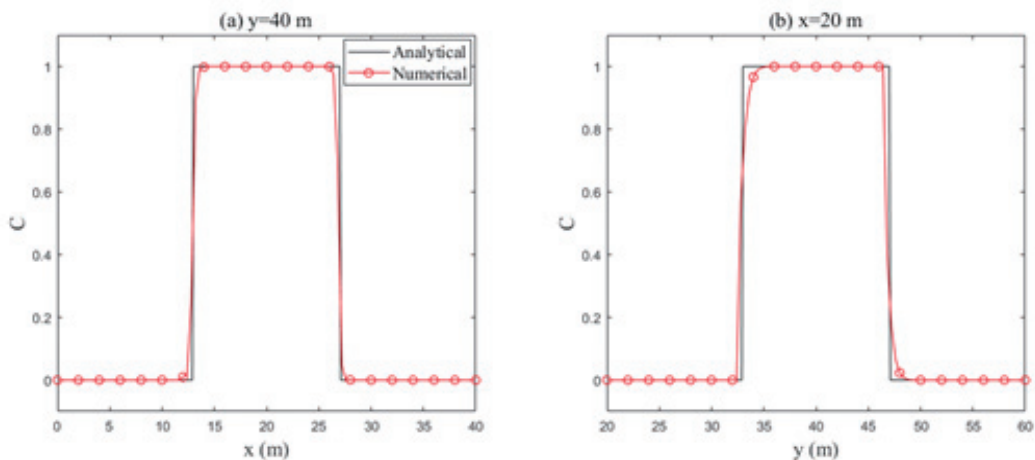


그림 3. 2차원 회전류에서의 스칼라 이송 결과 비교



적용성을 평가하기 위해 벤치마크 테스트를 수행하였으며, 결합모형을 통해 재생산된 수리실험은 Lloyd and Stansby (1997)에 의해 수행된 수중 원형 섬 뒤에서 발생하는 후류에서의 용질 이송 실험이다. Lloyd and Stansby (1997)는 길이 9.75 m, 폭 1.52 m의 수로의 유입구로부터 5.0 m 하류 부근에 반경 0.75

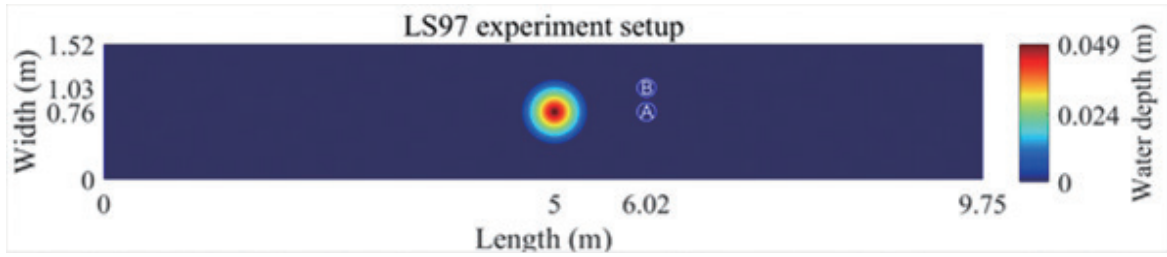


그림 4. Lloyd and Stansby (1997) 수심조건 및 게이지 위치

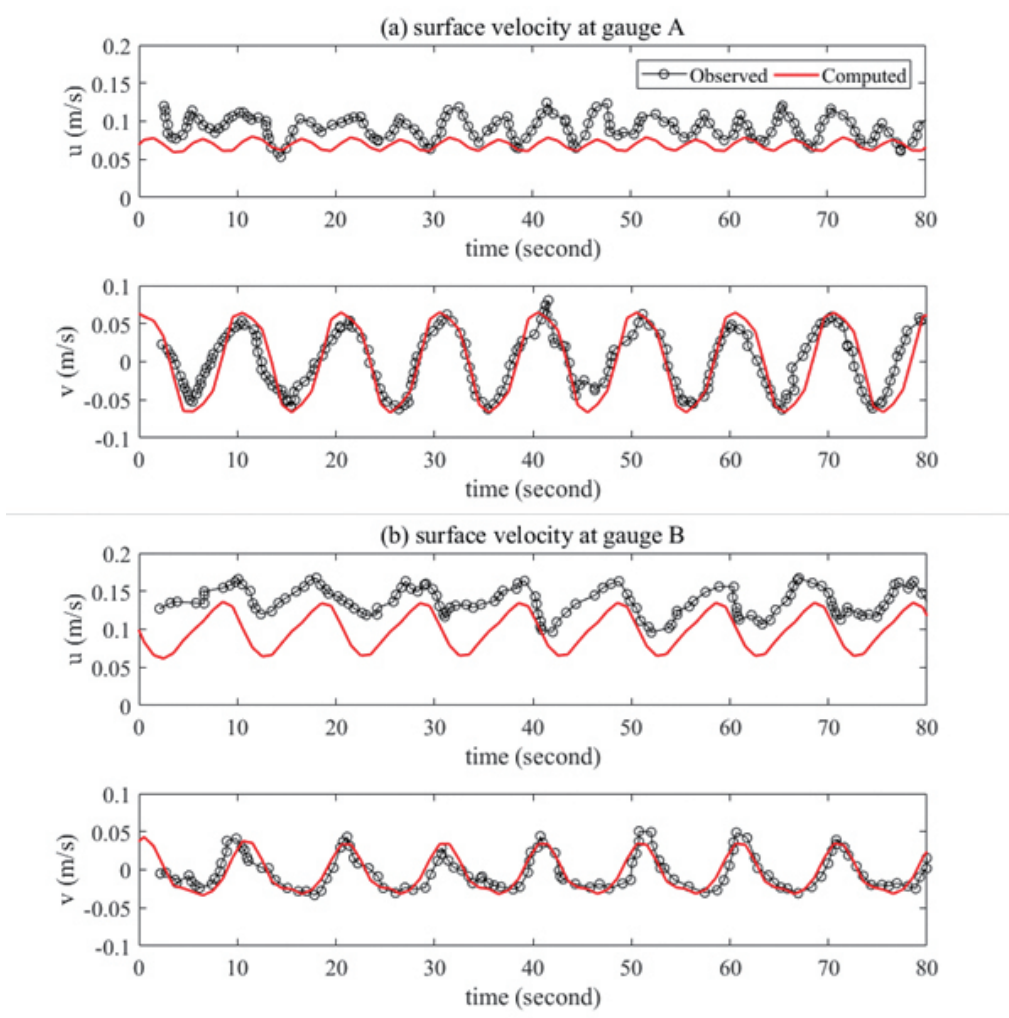


그림 5. 게이지 A, B에서의 유속 비교

m의 원뿔형 섬을 설치하였으며, 실험 조건에 따라 수로 내 평균유속과 원뿔형 섬의 조건을 다르게 설정하였다. 본 연구에서는 이 중 SB4\_02를 선택하였으며, 이에 따라 평균유속은 0.115 m/s로 설정되었다. 실험에서 사용된 수로의 수심조건은 그림 4와 같으며, 그 외 실험조건에 대한 자세한 설명은 Lloyd and Stansby (1997)에 나타나 있다.

Lloyd and Stansby (1997) 실험을 이용하여 2차원 수심적분형 동수역학 모형을 검증할 경우 원뿔형 섬의 3차원적 형상에 의한 후류에서의 특성이 잘 반영되지 않아 길이 방향의 유속인  $u$ 가 작게 계산되고, 폭 방향의 유속인  $v$ 의 진동수가 더욱 짧게 나타나는 문제점을 가지고 있다. 유속  $v$ 의 상을 맞추기 위해 조도계수를 Lloyd and Stansby (1997)에서 제시한 0.01보다 큰 0.02로 설정하였으며, 이에 따라 그림 6과 같이 유속  $\bar{v}$ 는 관측값과 잘 일치하게 계산되었음을 확인할 수 있다.

용질 이송의 경우 그림 6와 같이 전반적으로 잘 모의됨을 확인할 수 있다. 또한 결합모형을 통해 재생산한 모의 결과는 Lloyd and Stansby (1997)에서 제시한 결과와 달리 용질의 농도를 분간할 수 있다는 장점 또한 가지고 있다. 벤치마크 테스트 결과는 결합모형이 실제 수치실험을 큰 오차 없이 잘 구현하고 있음을 나타낸다.

### 3.4 원뿔형 섬이 위치한 사면을 따라 이동하는 고립쇄파에서의 용질 이송

추가적으로, 모형의 적용성을 평가하기 위해 Lynett et al. (2019)에 의해

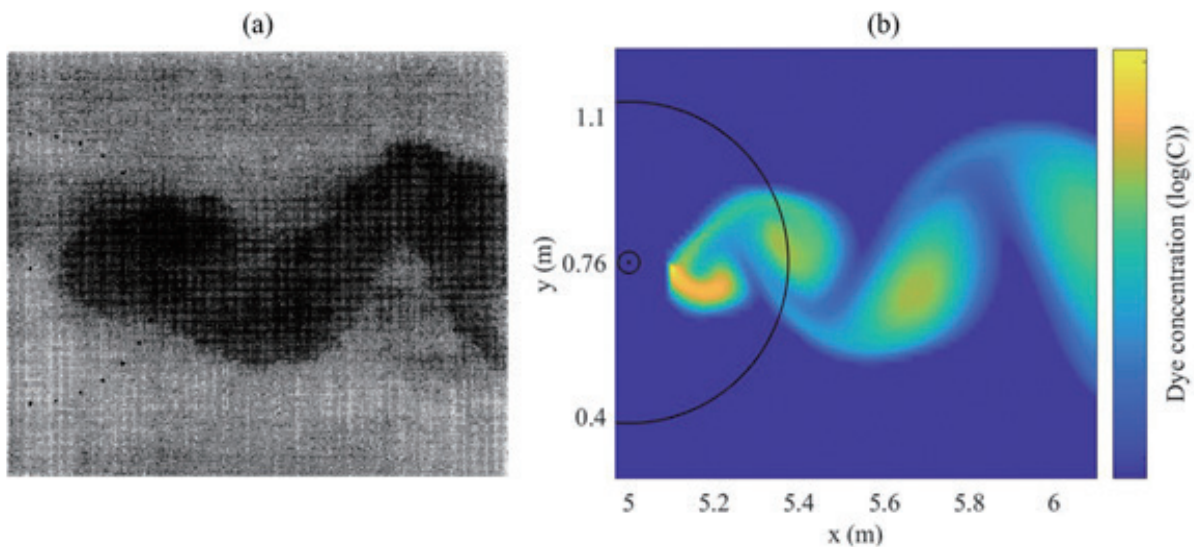


그림 6. 용질 이송 결과 비교 (a) Lloyd and Stansby (1997), (b) 결합모형



수행된 원뿔형 섬이 위치한 3차원 형상의 사면을 따라 이동하는 고립파에서의 용질 이송 실험을 수행하였다. 이 실험은 그림 7과 같이 3차원적으로 다양한 수심을 갖는 수조 내 0.39 m의 파고를 갖는 고립파의 전파 과정에서의 원뿔형 섬 후면에서 방출되는 염료의 이송을 추적하였다. 그림 7 내 9개의 지점은 각각 수위 관측지점이 있는 위치를 나타낸다. 이 실험에서는 고립파의 쇄파에 따른 에너지 소산이 염료의 분산에 영향을 미치게 되는데, 이를 고려하기 위해 쇄파모형을 고려하였으며, 쇄파모형 및 결합모형 내 동수역학 모형의 검증을 위해 쇄파모형 대신 리미터를 사용한 경우와 수위를 비교하였다. 9개의 관측지점 중 쇄파가 발생하지 않은 1, 2, 4, 5번 게이지를 제외한 나머지 게이지에 대한 비교를 수행하였다.

그림 8은 고립파의 전파 동안 게이지 3, 6, 7, 8, 9에서 관측한 수위를 나타낸다. 쇄파가 발생하지 않은 게이지 1, 2, 4, 5의 경우 리미터 기법과 쇄파모형을 사용한 경우에서 큰 차이가 발생하지 않음을 확인할 수 있다. 또한, 전반적으로 확인하였을 때 리미터 기법을 사용한 경우보다 쇄파모형을 고려하였을 때 더욱 관측값에 근접한 결과를 나타냄을 확인할 수 있다. 차이가 가장 크게 발생한 게이지 7에서는 쇄파 모형을 고려함에 따라 최대 파고가 약 12.3% 감소함을 확인하였다. 또한, 관측값과의 RMSE를 산정할 경우 쇄파 모형을 고려한 경우 0.0017m, 리미터를 사용한 경우 0.0028m로 쇄파 모형을 고려함에 따라 약 39% 감소함을 확인할 수 있다. 따라서, 본 결합모형에서의 쇄파 모형 적용은 성공적이며, 수치적 분산에 의존하지 않아도 모형의 안정성을

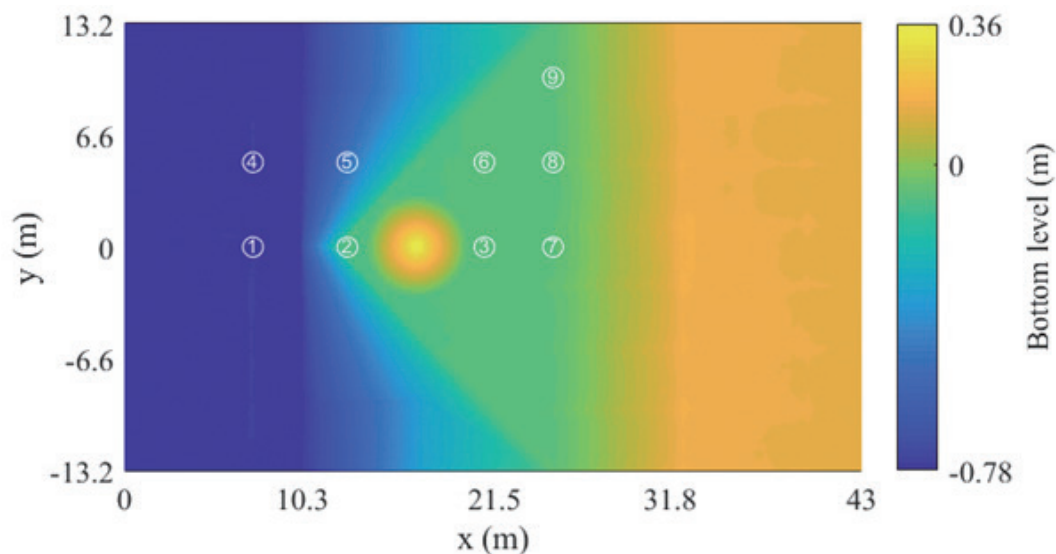


그림 7. Lynett et al. (2019) 수심조건 및 게이지 위치

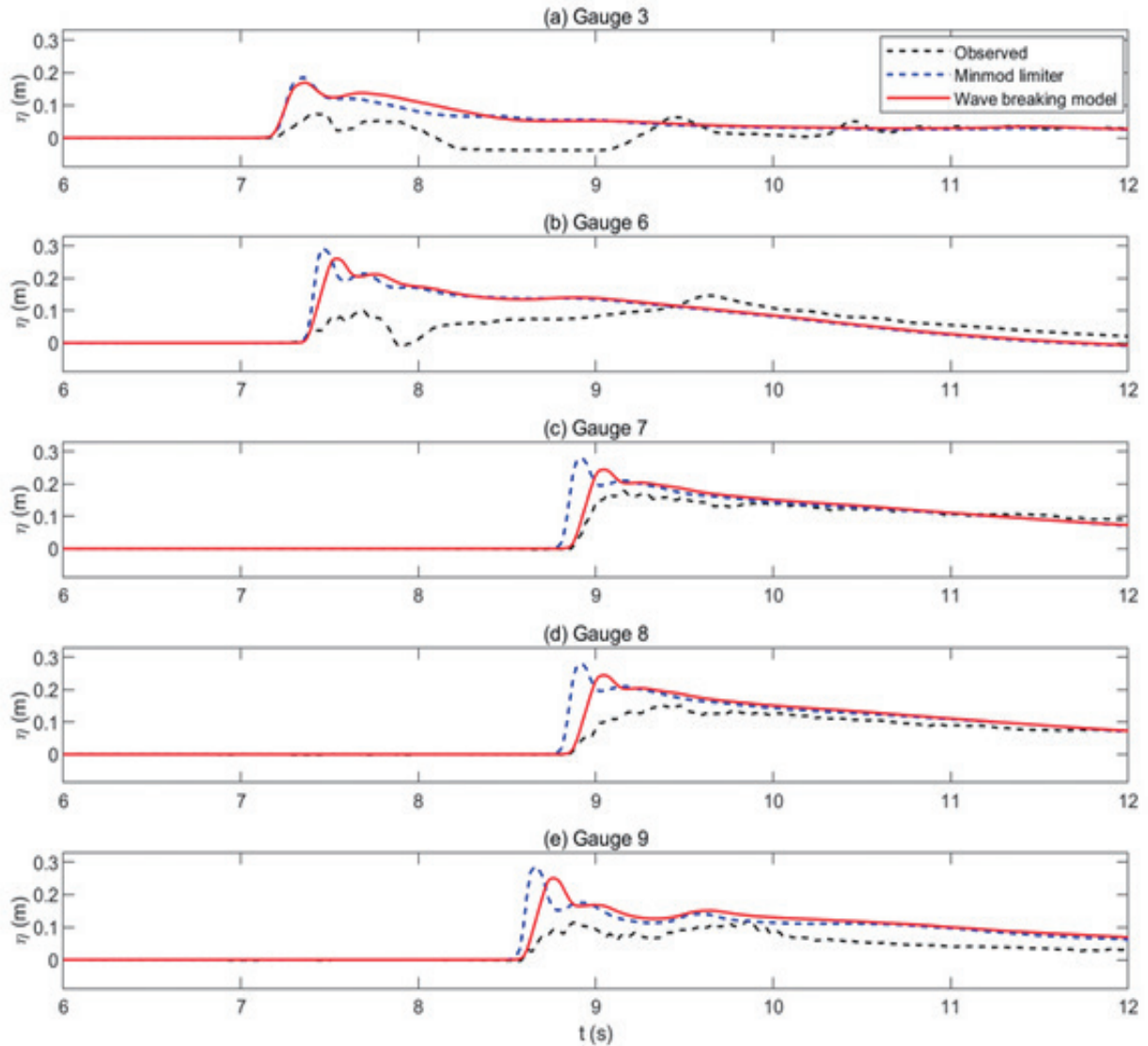


그림 8. 고립파 전파 동안 게이지 1~9에서의 시간에 따른 수위

충분히 충족시킬 수 있음을 확인하였다.

그림 9는 고립파 전파 동안의 실험에서 관측된 염료 이송과 결합모형을 통해 계산한 염료 이송 모의결과를 나타낸다.  $t=6.2$ 초일 때 관측값을 보면 고립파가 아직 도달하지 않았음에도 불구하고 분자 자체의 확산이 발생하고 있지만, 결합모형에서는 분자확산을 고려하지 않았기 때문에 차이를 나타내고 있다. 그러나 이후 시간에서의 염료 이송의 경우 흐름에 의한 이송이 지배적이기 때문에 비슷한 결과를 나타냄을 확인할 수 있다. 따라서, 두 번째의 벤치마크 테스트 결과 역시도 결합모형이 수리실험을 큰 오차 없이 잘 재생산하였음을 보여주었다.

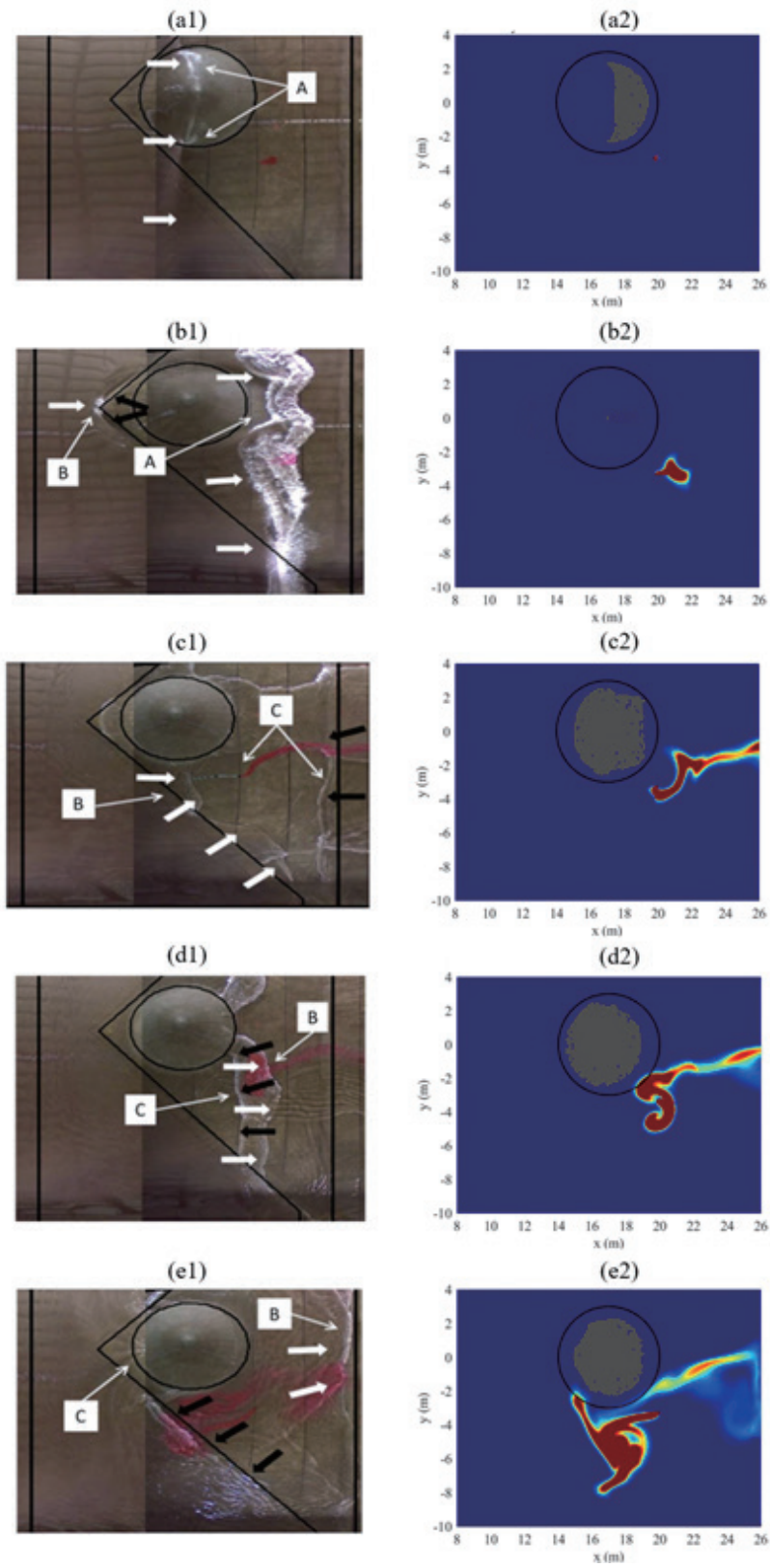


그림 9. 고립파 전파 동안의 시간에 따른 열류 이송 (좌) Lynett et al. (2019), (우) 결합모형  
 (a) 6.2초, (b) 8초, (c) 15초, (d) 20초, (e) 27.4초

## 04 마치며

본 기고에서는 GPU 가속화 기반의 사용자-모델간 인터랙티브 시스템을 갖춘 이송-확산 모형을 소개하였으며, 해석해 및 수치실험을 이용한 4차례의 비교는 모형의 수치확산 발생 정도와 정확성을 검증하였다. 이러한 고성능 컴퓨팅시스템 기반의 이송-확산 모형은 기존 모형에 비해 정확성이 보장된 범위 내에서 빠른 계산속도로 인해 Boussinesq 모형에서 고해상도 격자의 현실적인 적용을 가능케한다. 이는 다양한 해양재해 및 이로 인한 피해 예측에 적용 가능할 것으로 예상되어, 파급효과가 클 것으로 예상된다. 또한, 시뮬레이션 도중 GUI를 통한 인터랙티브 시스템은 모형의 사용성/편의성을 높임과 동시에 수심, 지형 및 용질 농도의 변화는 해안구조물 및 방재시스템 설계 등 활용범위가 매우 넓을 것으로 예상된다.

### 감사의 글

본 연구는 2020년도 정부(교육과학기술부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 기초연구임(No. 2019R1A2C1089109).

### 참고문헌

- Kennedy, A. B., Chen, Q., Kirby, J. T., & Dalrymple, R. A. (2000). Boussinesq modeling of wave transformation, breaking, and runup. I: 1D. *Journal of waterway, port, coastal, and ocean engineering*, 126(1), 39-47.
- Liu, X. (2019). A robust numerical model for shallow water governing solute transport with wet/dry interfaces. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 351, 85-108.
- Lloyd, P. M., & Stansby, P. K. (1997). Shallow-water flow around model conical islands of small side slope. II: Submerged. *Journal of Hydraulic Engineering*, 123(12), 1068-1077.
- Lynett, P. J., Swigler, D., El Safty, H., Montoya, L., Keen, A. S., Son, S., & Higuera, P. (2019). Three-Dimensional Hydrodynamics Associated with a Solitary Wave Traveling over an Alongshore Variable Shallow Shelf. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 145(6), 04019024.
- Madsen, P. A., & Sørensen, O. R. (1992). A new form of the Boussinesq equations with improved linear dispersion characteristics. Part 2. A slowly-varying bathymetry. *Coastal engineering*, 18(3-4), 183-204.
- Tavakkol, S., & Lynett, P. (2017). Celeris: A GPU-accelerated open source software with a Boussinesq-type wave solver for real-time interactive simulation and visualization. *Computer Physics Communications*, 217, 117-127.